

LNF-62/36

A. Bonanni, G. Sacerdoti: RELAZIONE SULLE PROVE PRELIMINARI
DELLA MISURA DI CAMPI MAGNETICI PULSATI MEDIANTE LA ROTAZIO
NE DI LUCE POLARIZZATA (EFFETTO FARADAY).

Nota interna: n° 136
16 maggio 1962

LNF-62/36

Nota interna: n° 136

16 Maggio 1962

A. Bonanni, G. Sacerdoti: RELAZIONE SULLE PROVE PRELIMINARI DELLA MISURA DI CAMPI MAGNETICI PULSATI MEDIANTE LA ROTAZIONE DI LUCE POLARIZZATA (EFFETTO FARADAY)^(x).

1) Introduzione

Nella ricerca fisica è utile disporre di alti campi magnetici. Quando i campi desiderati superano i 20 + + 30 kgauss bisogna ricorrere a magneti superconduttori (fino a 60 + 100 kgauss) o a magneti impulsati (praticamente fino a 350 kgauss).

In questo ultimo caso la durata dell'impulso, per ragioni termiche e meccaniche, deve essere praticamente contenuta tra qualche sec e qualche msec.

La misura del campo magnetico in tali condizioni è naturalmente più difficile della misura di un campo statico per la rapidità dell'impulso.

In generale si può impiegare uno dei seguenti metodi:

1) misura con una bobina di peak-up e integratore;

(x) - Alle misure e alle realizzazioni sperimentali ha utilmente collaborato anche il Sig. R. Bruzzese. Parte delle informazioni qui raccolte rappresentano un estratto della tesi di laurea in ingegneria elettrotecnica dell'ing. Bonanni.

- 2) misura con sonda di Hall;
- 3) misura mediante l'effetto Faraday (sonda sottile);
- 4) misura mediante l'effetto Faraday (sonda lunga);
- 5) misura di deflessione di fasci di particelle.

Ognuno di questi metodi presenta vantaggi e svantaggi che qui elencheremo:

- La misura con il metodo induttivo consente la valutazione del campo mediato in uno spazio sufficientemente piccolo. Gli inconvenienti maggiori si hanno nella valutazione degli effetti delle capacità parassite, dell'area effettiva della bobina, alla quale va aggiunta l'area concatenata con i fili terminali, e naturalmente nella lettura, che, a meno di non ricorrere a metodi troppo complicati, dovrà effettuarsi mediante un oscillografo⁽⁷⁾.
- Nella misura con sonda di Hall si valuta il campo mediato in uno spazio più grande di quello relativo al metodo induttivo. Il segnale di uscita è sensibile alle variazioni di temperatura e se la scarica è rapida anche le tensioni indotte possono influire sulla misura. Per scariche della durata di qualche msec si può raggiungere una precisione di $\pm 2\%$ nel valore assoluto del campo massimo; nelle misure relative la precisione, a condizione di usare molta attenzione e particolari precauzioni, potrà raggiungere $\pm 1\%$.
- Nella misura mediante l'effetto Faraday con sonda sottile la rotazione del piano di polarizzazione della luce è piccola e la precisione è naturalmente inferiore a quella raggiungibile con sonda lunga^(4,5,6).
- La misura mediante l'effetto Faraday con sonda lunga presenta lo svantaggio di fornire un valore del campo magnetico mediato su un grande volume. Questo valore medio si

può però conoscere con la precisione dell'1‰ e l'informazione si può avere in forma numerica. Praticamente non si ha inerzia, cioè si hanno ritardi nella rotazione trascurabili rispetto alla durata dell'impulso ($\sim 10^{-9}$ sec⁽¹¹⁾). Effetti di saturazione possono esservi, ma a temperatura ambiente sono trascurabili fino a campi di 300.000 gauss⁽⁸⁾ e anche maggiori se si sceglie opportunamente il materiale⁽¹⁰⁾.

- La misura della deviazione di fasci di particelle non offre vantaggi pratici rispetto al metodo precedente e il raggiungimento di buone precisioni è vincolato all'impiego di sorgenti altamente energetiche.

Nell'apparecchiatura che descriveremo abbiamo impiegato per la misura del campo magnetico l'effetto Faraday con sonda lunga.

Le misure sono state eseguite su campi medii e ci hanno permesso di trarre positive conclusioni sulla possibilità del metodo per l'applicazione ad alti campi.

2) Teoria dell'effetto Faraday

E' noto che in un mezzo materiale, immerso in un campo magnetico, un raggio di luce polarizzata, parallelo alle linee di flusso del campo, subisce una rotazione del proprio piano di polarizzazione (effetto Faraday).

Quando il campo magnetico è uniforme e se non si verificano fenomeni di saturazione, la rotazione θ è espressa dalla nota legge di Verdet

$$(1) \quad \theta = V \cdot \ell \cdot H$$

dove ℓ è il percorso del raggio luminoso

H l'intensità del campo magnetico

V la costante di Verdet, dipendente dalla natura del mezzo, dalla temperatura e dalla lunghezza d'onda della luce incidente.

Il fenomeno è stato oggetto di trattazioni classiche e quantistiche (Rosenfeld, Serber, Ladenburg, Van Vleck⁽⁸⁾ e altri); ma una teoria dell'effetto Faraday esiste solo per gli atomi e per le molecole.

L'estensione ai solidi di tale teoria è possibile solo in via approssimata.

In termini di meccanica classica ondulatoria la rotazione del piano di polarizzazione della luce incidente può ricondursi all'azione acceleratrice o ritardatrice esplicata dal campo magnetico sul moto degli elettroni impresso dal vettore campo elettrico relativo ad un'onda luminosa polarizzata circolarmente rispettivamente sinistra o destra⁽¹⁾. Si riconosce facilmente che la presenza di un campo magnetico parallelo alla direzione di propagazione della luce rende diversi gli indici di rifrazione per la luce polarizzata circolarmente sinistra (n_s) e destra (n_d) anche in un mezzo naturalmente non birifrangente.

In particolare⁽¹⁾ si perviene alla seguente espressione della differenza fra i due indici di rifrazione

$$(2) \quad n_d - n_s = \frac{(n^2 - 1)^2}{n} \frac{\epsilon_0 \mu_0 H \omega}{N e}$$

dove n è l'indice di rifrazione del mezzo in assenza di campo magnetico, ω la pulsazione dell'onda incidente, N è il numero di oscillatori elettronici per unità di volume e H il campo magnetico applicato.

D'altra parte la rotazione ϑ che subisce il piano di polarizzazione di un'onda polarizzata linearmente dopo un percorso l in una sostanza birifrangente è pari a metà della differenza di fase $\Delta\varphi$ impressa ai vettori campo elettrico di due onde polarizzate circolarmente sinistra e destra che abbiano percorso il medesimo cammino l .

$\Delta\varphi$ è la differenza di cammino ottico di tali due onde misurata in lunghezze d'onda λ (nel vuoto) e moltiplicata per 2π ; risulta quindi

$$(3) \quad \Delta\varphi = \frac{e}{\lambda} 2\pi (n_d - n_s)$$

Combinando la (2) e la (3) si perviene ad una espressione della rotazione θ formalmente identica alla legge di Verdet:

$$(4) \quad \theta = \left[\pi \frac{(n^2 - 1)^2}{n} \frac{\omega \mu_0 \epsilon_0}{\lambda n e} \right] e H$$

3) Applicazioni dell'effetto Faraday alla misura dei campi magnetici.

La misura dei campi statici con l'effetto Faraday non presenta difficoltà di rilievo e può far ricorso ai metodi di rivelazione di normale impiego nella polarimetria. Si tratta in generale di metodi di zero che consentono di raggiungere precisioni dell'ordine dell'1% anche con realizzazioni a indicazione diretta⁽³⁾.

Tuttavia il campo di applicazione di questo metodo è estremamente limitato⁽⁶⁾ sia perchè il traferro dei normali campi statici è generalmente limitato, sia per la necessità di avere un raggio di luce che proceda parallelamente alle linee di flusso del campo magnetico.

Più interessante risulta invece l'applicazione dell'effetto Faraday alla misura di campi pulsati di grande e medio valore.

La prima realizzazione fu compiuta da G. Rault⁽⁴⁾ nel 1948, che applicò l'effetto Faraday alla misura di un campo pulsato di circa 50.000 gauss.

La frequenza degli impulsi relativamente elevata (50 impulsi al sec) rese possibile una misura praticamente statica della rotazione del piano di polarizzazione ($\theta \approx 3^\circ$)^(x).

L'impiego di una sonda sottile (0.9 mm di spessore) permise la determinazione di un valore praticamente puntuale del campo.

Più recentemente (1957) Malecky, Surma e Gibalewicz⁽⁵⁾ hanno applicato lo stesso procedimento alla misura di un campo pulsato di circa 100.000 gauss.

La misura fu eseguita in condizioni transitorie mediante l'impiego di un oscillografo e della registrazione fotografica. La sonda, di lunghezza effettiva cm 10, era costituita da CS₂ contenuto in un tubo di vetro. La rotazione ottenuta era di circa 300°. Dalla misura si otteneva il campo massimo mediato in uno spazio piuttosto grande.

La lunghezza equivalente della sonda dedotta dall'andamento del campo mediante integrazione grafica risultava di appena cm 4,7.

La precisione delle misure era di circa 1% e i risultati apparivano in buono accordo con quelli ottenuti mediante misura con bobina di peak-up⁽⁷⁾.

Il procedimento di misura, che ora descriveremo, permette di valutare il campo massimo mediato in uno spazio piuttosto grande.

L'informazione si ottiene però in forma numerica e la sensibilità del metodo, proporzionale al valore del campo magnetico da misurare, può raggiungere il 5% per campo

(x) - Mediante l'impiego di una sorgente di luce impulsiva (durata ~ 1 sec) sincronizzata con il massimo valore del campo magnetico e utilizzando l'inerzia del dispositivo di rivelazione, si analizzava la luce emergente dal provino solo in condizioni di massima rotazione.

pi di circa 300.000 gauss.

La luce, praticamente monocromatica, prodotta da una lampada a vapori di sodio^(x) viene concentrata dal condensatore C sulla fenditura F (fig. 1).

La lente collimatrice L dà un fascio di luce praticamente parallelo.

La luce, polarizzata mediante il polaroid P, viene inviata sulla sonda.

Questa è costituita da 2 prismi di flint pesante SF4, sagomati in modo da ottenere un duplice passaggio della luce all'interno del magnete (fig. 2).

Nella scelta della sostanza ottica si sono tenute presenti due diverse esigenze. Si è cercato di impiegare una sostanza con elevata costante di Verdet e che nello stesso tempo permettesse di risolvere semplicemente il problema della riflessione del fascio di luce.

La costante di Verdet del flint pesante è (per $\lambda = 5893 \text{ \AA}$ e $t = 35^\circ\text{C}$)

$$V = 1,013 \text{ grado/cm kgauss}$$

e quindi maggiore di quella del CS₂ ($V = 0,716$ gradi/cm kgauss).

Il fascio di luce, attraversata la sonda, viene decomposto in due fasci, ai quali compete approssimativamente lo stesso flusso luminoso (fig. 1).

Ciascun fascio parziale attraversa un polaroid analizzatore (A_1 e A_2) e investe quindi il catodo di un fotomoltiplicatore RCA 6217.

Il percorso della luce dalla sonda ai fototubi è di circa m 1,70; in tal modo i fotomoltiplicatori si trovano in una zona dove nel caso specifico il campo ma-

(x) - Alle due righe dello spettro del sodio corrispondono, come è noto, le lunghezze d'onda $\lambda_{D_1} = 5892\text{\AA}$ e $\lambda_{D_2} = 5894\text{\AA}$.

gnético non è troppo intenso. Si è reso però egualmente necessario l'impiego di una buona schermatura magnetica, eseguita con fogli di mumetal.

Gli analizzatori A_1 e A_2 sono orientati in modo da avere i piani di trasmissione normali fra loro e a 45° con il piano di vibrazione della luce incidente in assenza di campo magnetico.

In tali condizioni la differenza v fra le tensioni di uscita dei due fototubi, nell'ipotesi di risposta lineare, ha andamento sinusoidale in funzione della rotazione del piano di polarizzazione e quindi del campo magnetico H .

Indicando con $2l$ la lunghezza del percorso ottico all'interno della sonda e tenendo presente la (1) si ottiene (cfr. Appendice 1)

$$(5) \quad v(t) = V_0 \cos \left[2 \frac{H(t)}{c} - \frac{\pi}{2} \right]$$

dove

$$(6) \quad c = \frac{1}{2lV}$$

Indicando con H_{\max} il valore massimo del campo magnetico si deduce dalla (5) che la $v(t)$ presenta durante le fasi ascendente e discendente del campo stesso un numero complessivo di semioscillazioni

$$(7) \quad N = \frac{2 \frac{2H_{\max}}{c}}{\pi}$$

Per $H_{\max} = 300.000$ gauss; $l = 15$ cm; $V = 1$ grado/cm kgauss si ottiene

$$N = 200$$

Raddrizzando quindi la $V(t)$ in doppia semionda si ottiene un treno di N impulsi. Contando il numero di tali impulsi,

si viene a stabilire una misura numerica del campo magnetico massimo.

La sensibilità percentuale del metodo risulta

$$(8) \quad \delta\% = \frac{100}{N} = 100 \frac{\pi}{2eV4H_{max}}$$

e per $H_{max} = 300.000$ gauss raggiunge lo 0,5%

Il potere risolutivo del dispositivo, definito dalla variazione di campo, che genera un impulso, è evidentemente

$$(9) \quad s = \frac{\pi}{4 \cdot 2eV} = 1.5 \text{ Kgauss/impulso.}$$

4) Cause di errori nella misura e critica del metodo

Per il suo carattere numerico il metodo in esame ha una sensibilità assoluta, che coincide con il potere risolutivo s definito dalla (9).

L'esame delle varie cause di errore dovrà essere condotto in modo da garantire che il numero di impulsi accusato dal dispositivo di rivelazione differisca da quello teorico al massimo di una unità^(x).

Le principali fonti di errore sono in generale:

- 1) scarsa stabilità meccanica del banco ottico;
- 2) effetti del campo magnetico sui fotomoltiplicatori;
- 3) variazioni accidentali del flusso luminoso prodotto dalla lampada;
- 4) disuniformità radiale del campo magnetico sulla sezione della sonda;

(x) - In tal caso le misure sono ripetibili nei limiti di sensibilità e la precisione del metodo coincide con il potere risolutivo.

- 5) errori di conteggio introdotti dal dispositivo di rivelazione;
- 6) errore sulla determinazione della lunghezza della sonda.

Se il campo magnetico ha però una forma d'onda oscillante, evidentemente si dovrà interrompere la misura dopo la prima semioscillazione mediante l'impiego di un relè elettronico.

Le condizioni di funzionamento di tale relè sono alquanto critiche, perchè il suo intervento si ha in corrispondenza alla massima frequenza di ripetizione degli impulsi rivelati, che può essere dell'ordine di 100 kc/sec (per campi di 300 kgauss e semiperiodo $2 + 3$ msec).

L'istante di intervento del relè può quindi essere differito al massimo di qualche μ sec.

Fra le cause di errore generali prima citate, le ultime due possono essere senz'altro trascurate.

Il dispositivo di conteggio si può infatti ritenere perfetto e la lunghezza della sonda può essere valutata con precisione più che sufficiente, se questa è di materiale solido. Qualche complicazione può sorgere nel caso che la sostanza ottica sia una soluzione, a causa della elasticità delle pareti della cella contenitrice^(x).

Nei riguardi della stabilità meccanica è evidente che vibrazioni e movimenti relativi della struttura dovranno essere di entità così piccola da non influire sulla intensità di luce che cade sui fotomoltiplicatori.

Dato il carattere impulsivo del campo e il suo valore particolarmente elevato si dovrà evitare l'impiego di materiali conduttori.

(x) - Se il materiale con il quale sono realizzate le pareti non ha costante di Verdet trascurabile, lo spessore di queste dovrà essere piccolo.

Per attenuare gli effetti del campo magnetico sui fotomoltiplicatori si ricorrerà all'impiego di efficienti schermi sia di mumetal che di rame e si disporranno i tubi a conveniente distanza del magnete (un paio di metri almeno, se il campo supera i 100 kgauss).

Perchè il flusso di luce prodotto sia costante, la sorgente dovrà essere alimentata in corrente continua. La tensione di alimentazione non richiede una particolare stabilizzazione nel metodo numerico da noi proposto, essendo tollerabili variazioni di flusso anche di qualche %.

Quando al contrario il valore del campo si deduce dall'esame di un oscillogramma⁽⁵⁾ la stabilizzazione richiesta è molto maggiore (almeno 1% nella tensione).

In ogni caso la disposizione di due fotomoltiplicatori operanti in un circuito differenziale attenua sensibilmente gli effetti della variazione di flusso luminoso.

La disuniformità radiale del campo magnetico sulla sezione del fascio di luce fa sì che i raggi luminosi elementari subiscano rotazioni diverse del piano di polarizzazione.

Lo sfasamento che ne risulta provoca una attenuazione degli impulsi di tensione all'uscita dei fototubi. Poichè tale sfasamento è proporzionale al valore assoluto della rotazione θ subita dal raggio medio del fascio si conclude che gli impulsi maggiormente attenuati sono quelli centrati del treno ai quali corrisponde il massimo campo e quindi la massima θ .

Per uno studio quantitativo degli effetti della disuniformità radiale è necessario determinare sperimentalmente o per via teorica il grafico del campo all'interno del magnete.

La differenza fra la rotazione θ_e subita da

piano di polarizzazione di un raggio elementare di eccentricità e rispetto al raggio centrale del fascio di luce e quella θ_0 subita da quest'ultimo è espressa in percento dalla relazione

$$(10) \quad \varepsilon \% = 100 \frac{\theta_e - \theta_0}{\theta_0} = 100 e \frac{g(e)}{H_0}$$

dove il significato dei simboli è il seguente: $g(e)$ è il valore medio del gradiente della componente del campo magnetico parallela alla direzione di propagazione della luce calcolato lungo il percorso del raggio di eccentricità e all'interno della sonda (figg. 4, 5)

$$(11) \quad g(e) = \frac{1}{e} \int_{x_0}^{x_e} \left[\frac{\partial H_y(x,y)}{\partial x} \right] dy$$

e H_0 il campo magnetico mediato lungo il percorso del raggio centrale del fascio

$$(12) \quad H_0 = \frac{1}{e} \int_{-e/2}^{e/2} H_y(x_0, y) dy$$

Le varie fonti di errore esaminate non producono in generale disturbi tali da far variare il numero di impulsi contenuti nel segnale rivelato.

Se in particolare le parti della struttura di sostegno maggiormente soggette al campo magnetico sono in materiale isolante, per cui non sono da temere spostamenti tali da far variare bruscamente la quantità di luce che cade sui fotomoltiplicatori, il solo disturbo veramente preoccupante è costituito dagli effetti del campo magnetico sui fototubi.

Il montaggio ottico deve essere eseguito con una certa cura in modo da avere una sufficiente intensità di luce sui fotocatodi. La resistenza anodica dei fototubi non

deve infatti superare il migliaio di Ω perchè si abbia una buona risposta alle alte frequenze.

Le maggiori difficoltà si sono incontrate nella risoluzione dei problemi di natura ottica.

E' noto infatti ⁽¹⁾ che la luce polarizzata linearmente, dopo una riflessione totale, risulta polarizzata ellitticamente. La pressura di un prisma a riflessione totale ad una estremità della sonda, e cioè a metà del percorso ottico attivo, fa sì che la polarizzazione del raggio di luce che percorre la seconda metà della sonda vari continuamente nel corso della misura.

Il segnale rivelato risulta allora più o meno deformato rispetto al suo andamento teorico, rappresentato in fig. 11, come indicano le figg. 6,7,8,9,10 che rappresentano il segnale ottenuto in sede di prove preliminari (cfr. paragr. seguente) per diverse orientazioni dei piani di trasmissione del polarizzatore e dell'analizzatore ^(x).

Quando nel provino si opera una sola riflessione è però possibile trovare una giacitura dei piani di trasmissione per la quale la deformazione scompare almeno in corrispondenza dei punti di zero e di massimo del segnale. L'oscillogramma ottenuto in queste condizioni è riprodotto in figura 11 ⁽⁺⁾.

(x) - Gli oscillogrammi riprodotti nelle figg. 6 + 11 sono stati ottenuti con una sonda di dimensioni ridotte ($e = 10$ cm) immersa solo parzialmente nel magnete.

(+) - Per un esame più approfondito della sensibilità del metodo e degli effetti della disuniformità radiale del campo si rimanda alla tesi di laurea citata.

5) Possibilità di incremento della sensibilità del metodo

Il potere risolutivo del dispositivo di misura descritto, $s = 1,5$ kgauss/impulso, è in generale soddisfacente nella misura degli alti campi pulsati (dell'ordine di 200+300 kgauss). In tal caso infatti la sensibilità percentuale è sempre superiore all'1% (da 0,5 a 0,75%).

Però nella misura di campo meno alti o quando interessi ridurre le dimensioni della sonda per ottenere un valore mediato su uno spazio limitato, il numero di impulsi indicato dal sistema digitale diminuisce.

In tali condizioni la sensibilità può non essere più soddisfacente. Si può allora ricorrere con vantaggio alla registrazione fotografica.

Si registrerà solo la parte centrale del treno di impulsi e si determinerà con il procedimento descritto in Appendice 2 la frazione di angolo retto contenuta nella rotazione θ_{\max} del piano di polarizzazione.

Il numero intero n di angoli retti contenuti in θ_{\max} sarà ancora indicato dal dispositivo numerico (n è la metà del numero N espresso dalla (7)).

Ponendo θ_{\max} nella forma

$$(13) \quad \theta_{\max} = n \frac{\pi}{2} + \varphi$$

con

$$(14) \quad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$$

l'errore percentuale nella misura di θ_{\max} risulta espresso da

$$(15) \quad \varepsilon\% = 100 \frac{\Delta\varphi}{n \frac{\pi}{2} + \varphi}$$

dove $\Delta\varphi$ rappresenta l'errore assoluto nella misura di φ . Senza ricorrere a metodi complicati per la misura di φ (cfr. App. 2) si può ritenere

$$(16) \quad \Delta\varphi \leq (0,02 \div 0,03) \pi$$

Sostituendo la (16) nella (15) e trascurando ψ rispetto a $n \frac{\pi}{2}$ si ottiene per l'errore percentuale ϵ il limite superiore

$$(17) \quad \epsilon_M \% = 100 \frac{0,03 \cdot 2}{n} = \frac{6}{n} \% .$$

In tal modo, anche per campi dell'ordine di 50kgauss, per i quali si ha un numero complessivo di impulsi

$$N = 2 n \sim 30$$

cioè una rotazione

$$\theta_{\max} \sim (15+16) \frac{\pi}{2}$$

la precisione delle misure supera largamente lo 0,5%.

Al medesimo risultato si perviene se supposto ancora il campo magnetico di circa 300 kgauss si riducono ad 1/6 le dimensioni della sonda allo scopo di ottenere un valore del campo mediato in uno spazio limitato (la lunghezza della sonda è in tal caso di soli 2,5 cm).

6) Risultati delle misure

Le misure sono state eseguite su un magnetino costituito da un solenoide di 220 spire (fig. 12) sul quale veniva scaricato un banco di condensatori elettrolitici da circa 3000 Joule^(x).

(x) - Il banco è costituito da 432 condensatori da 80 μF e 500 V_p divisi in gruppi di 4 unità in serie. La capacità complessiva è

$$C_L = \frac{80}{4} \frac{432}{4} = 2160 \mu F$$

Il banco viene caricato a circa 1700 V. e l'energia immagazzinata è quindi

$$W_L = 3120 J$$

Il campo massimo ottenuto, misurato con bobina di peak-up e mediante l'effetto Faraday, risultava di circa 22.000 gauss.

La prima applicazione dell'effetto Faraday è stata e seguita con un dispositivo che prevedeva un solo passaggio della luce entro il magnete (fig. 3).

La sonda era costituita da un cilindro di SF4 di diametro 20 mm e lunghezza 100 mm. In queste prove si è impiegato un solo fotomoltiplicatore.

I polaroid analizzatore e polarizzatore sono stati disposti prima incrociati ottenendo all'uscita dei fotomoltiplicatori il segnale di fig. 13.

Nell'oscillogramma è anche indicato l'andamento della corrente nella bobina. Si è quindi proceduto al calcolo della rotazione massima θ_{\max} mediante la misura dei seguenti h ed h_{\max} (fig. 13a).
Si è ottenuto

$$h_{\max} = 27 \text{ mm}$$

$$h = 10 \text{ mm}$$

$$(18) \quad \theta_{\max} = \pi + \arcsen \sqrt{\frac{h}{h_{\max}}} = \pi + \arcsen 0.61 = 217^{\circ} 30'$$

Quindi applicando la formula di Verdet si è calcolato il valore massimo del campo magnetico mediato sulla lunghezza della sonda ($l = 10 \text{ cm}$):

$$(19) \quad H_{\max} = \frac{\theta_{\max}}{lV} = \frac{217.5}{10 \cdot 1} = 21.75 \text{ Kgauss.}$$

In un secondo tempo i polaroid sono stati disposti a 45° e si è ottenuto l'oscillogramma di fig. 14. Con le notazioni di figura la rotazione θ_{\max} risulta espressa da

$$\theta_{\max} = 2\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsen \frac{k}{R_M} = 180^{\circ} + \frac{1}{2} \arcsen \frac{14.2}{15} = 216^{\circ}$$

Lo scarto fra le due determinazioni è inferiore allo 1% e deve essere almeno in parte attribuito a piccole variazioni della tensione di carica dei condensatori.

Le misure più precise sono state eseguite con la sonda duplice rappresentata in fig. 2. La lunghezza del percorso ottico era in questo caso di 30 cm e gli oscillogrammi ottenuti sono riportati nelle figg. 15 e 16 che rappresentano rispettivamente il segnale di uscita di uno dei due fotomoltiplicatori e i segnali di uscita di entrambi. L'oscillogramma di fig. 17 rappresenta invece la differenza di tali due segnali di uscita.

Il segnale differenza è inviato a comandare un multivibratore bistabile; per differenziazione delle onde quadre prodotte da quest'ultimo si ottengono i picchi che vengono inviati al contatore elettronico.

Ad ogni scarica si ottenevano 12 impulsi e la misura risultava perfettamente ripetibile.

Per maggiore garanzia abbiamo disposto il banco di condensatori in condizione di scarica automatica (il periodo di ripetizione era circa 50 sec) ed abbiamo installato un secondo contatore per il computo delle scariche.

Dopo un totale di 130 scariche il contatore elettronico aveva contato 1554 impulsi, con uno scarto di appena 6 impulsi rispetto al valore teorico.

La misura precisa del valore massimo del campo è stata eseguita anche in questo caso con l'ausilio dell'oscillogramma di fig. 15 riprodotto in fig. 15a.

La rotazione massima è espressa al solito da

$$\vartheta_{\max} = n \frac{\pi}{2} + \varphi$$

dove

$$n = 5$$

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{h_{\max} - h}{h_{\max}}} = 65^{\circ}$$

(risulta infatti $h = 6,5 \text{ mm}$ - $h_{\text{max}} = 35 \text{ mm}$)

Si ottiene quindi

$$\theta_{\text{max}} = 515^\circ$$

e applicando la relazione di Verdet si ottiene

$$(20) \quad H_{\text{max}} = \frac{\theta_{\text{max}}}{2lV} = \frac{515}{2 \cdot 15 \cdot 1} = 17,2 \dots \text{ Kgauss}$$

Lo scarto fra il valore (20) del campo massimo e quello espresso dalla (19) deve essere attribuito al fatto che nelle condizioni attuali di esperienza le dimensioni della sonda sono 1,5 volte più grandi che nel caso precedente; il campo magnetico espresso dalla (20) rappresenta dunque un valore mediato su uno spazio sensibilmente maggiore (x).

7) Programma futuro

E' attualmente in progetto un dispositivo "definitivo" per l'applicazione corrente dell'effetto Faraday alla misura di alti campi magnetici. L'apparecchio sarà in linea di massima uguale a quello descritto nelle pagine precedenti e impiegato per le prove preliminari. I miglioramenti che intendiamo apportare riguardano soprattutto la maneggevolezza del dispositivo, che sarà costituito da un monoblocco mobile, e la facilità di messa a punto del sistema ottico. E' contemporaneamente allo studio la realizzazione di un apparato sperimentale per la misura degli effetti di saturazione dell'effetto Faraday ad alti campi magnetici.

(x) - Si noti che il dispositivo a indicazione digitale avrebbe fornito per la misura in questione il valore

$$(20') \quad H_{\text{max}} = N \cdot s = 12 \times 1,5 = 18 \text{ kgauss}$$

essendo s il potere risolutivo definito dalla (9) e N il numero di impulsi.

Poichè tali effetti sono trascurabili a temperatura ambiente fino a campi dell'ordine di 500 kgauss, le esperienze in questione verranno condotte a bassa temperatura (4,2°K).

Appendice 1

La rotazione istantanea $\theta(t)$ del piano di polarizzazione è in base alla (1) proporzionale al contemporaneo valore del campo $H(t)$ secondo una costante dipendente, oltre che dalla natura del mezzo ottico impiegato per la sonda, dalla lunghezza l di quest'ultima e dal numero di riflessioni del raggio di luce

$$(21) \quad \theta(t) = \frac{H(t)}{c}$$

$$(22) \quad c = \frac{l}{2lV} = \frac{l}{3011} = 0.033 \text{ kgauss/grado}$$

In base alla (21) possiamo dire che la giacitura del piano di polarizzazione della luce che investe i due polaroids analizzatori ha nel tempo lo stesso andamento del campo magnetico.

L'intensità di luce trasmessa da uno qualunque dei polaroids risulta quindi modulata presentando una successione di massimi e minimi corrispondenti a incrementi successivi di $\pi/2$ della rotazione $\theta(t)$.

Quantitativamente, tenendo conto del fatto che i due analizzatori hanno i piani di trasmissione fra loro normali e a 45° con il piano di polarizzazione della radiazione incidente per $H = 0$ (e quindi $\theta(t) = 0$) i valori istantanei del flusso luminoso trasmesso dai due polaroids hanno rispettivamente le espressioni

$$(23) \quad Y_1 = Y_{01} \cos^2[\theta(t) - 45^\circ] + \alpha_1 Y_{01}$$

$$(24) \quad Y_2 = Y_{02} \sin^2[\theta(t) - 45^\circ] + \alpha_2 Y_{02}$$

dove φ_{01} e φ_{02} rappresentano i flussi incidenti sui polaroids 1 e 2 ridotti delle perdite in questi ultimi, mentre $\alpha_1 \varphi_{01}$ e $\alpha_2 \varphi_{02}$ rappresentano le quote del flusso incidente trasmesse in posizione di estinzione.

Le quantità di luce (23) e (24) vengono inviate su due fotomoltiplicatori a risposta lineare e pertanto ai segnali di uscita di tali fototubi competono le espressioni

$$(25) \quad v_1(t) = k_1 \varphi_1(t) = k_1 \alpha_1 \varphi_{01} + k_1 \varphi_{01} \cos^2 [\theta(t) - 45^\circ]$$

$$(26) \quad v_2(t) = k_2 \varphi_2(t) = k_2 \alpha_2 \varphi_{02} + k_2 \varphi_{02} \sin^2 [\theta(t) - 45^\circ]$$

Supponiamo ora che risulti

$$\varphi_{01} = \varphi_{02} = \varphi_0$$

e ancora, per essere i polaroids analizzatori dello stesso tipo

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha,$$

Le costanti k_1 e k_2 saranno invece in generale diverse anche per fotomoltiplicatori dello stesso tipo; ma potranno essere rese uguali semplicemente adottando due diverse resistenze anodiche.

In questa ipotesi le (25) e (26) si scrivono semplicemente

$$(25') \quad v_1(t) = k \alpha \varphi_0 + k \varphi_0 \cos^2 [\theta(t) - 45^\circ]$$

$$(26') \quad v_2(t) = k \alpha \varphi_0 + k \varphi_0 \sin^2 [\theta(t) - 45^\circ]$$

Eseguendo quindi la differenza fra i segnali $v_1(t)$ e $v_2(t)$ prelevati sulle placche dei due fototubi si ottiene il segna-

le definitivo di equazione

$$(27) \quad v(t) = v_1 - v_2 = k \gamma_0 \left\{ \omega^2 [\theta(t) - 45^\circ] - \omega^2 [\theta(t) - 45^\circ] \right\}$$

e cioè

$$(28) \quad v(t) = k \gamma_0 \omega \left[2\theta(t) - \frac{\pi}{2} \right]$$

Ponendo infine nella (23)

$$k \gamma_0 = V_0$$

e ricordando la (16), si ottiene l'espressione

$$(29) \quad v(t) = V_0 \omega \left[2 \frac{H(t)}{c} - \frac{\pi}{2} \right]$$

che coincide con la (5).

Appendice 2

Quando la rotazione θ_{\max} impressa al piano di polarizzazione della luce è dell'ordine dei $300^\circ + 400^\circ$ una determinazione abbastanza precisa di detta rotazione e quindi del campo massimo, può essere condotta in base all'esame dell'oscillogramma del segnale $v(t)$ espresso dalla (5) ovvero di uno dei due segnali $v_1(t)$ e $v_2(t)$ espressi dalle relazioni

$$(30) \quad v_1(t) = V_0 \cos^2 \theta(t)$$

$$(31) \quad v_2(t) = V_0 \sin^2 \theta(t)$$

che si ricavano dalle (25') e (26') trascurando $\alpha \gamma_0$ e supponendo analizzatore e polarizzatore rispettivamente in posizione di massima trasmissione o di estinzione per $H = 0$.

Esamineremo in particolare i due casi in cui il segnale rivelato sia espresso dalla (31) e dalla (5).

Nel primo caso l'andamento della $v_2(t)$ è del tipo indicato in fig. 18.

All'istante di massimo campo la U_2 vale

$$(32) \quad U_{2M} = V_0 \operatorname{sen}^2 \mathcal{Q}_{\max}$$

e posto

$$(33) \quad \mathcal{Q}_{\max} = n \frac{\pi}{2} + \varphi$$

con
$$0 \leq \varphi < \pi/2$$

la (32) si scriveva

$$(34) \quad U_{2M} = V_0 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right)$$

Per $\mathcal{Q} = n \frac{\pi}{2}$ la tensione U_2 vale

$$(35) \quad U_{2\frac{\pi}{2}} = V_0$$

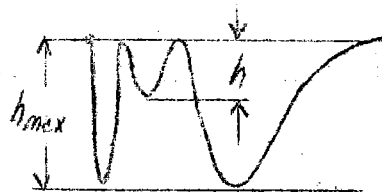
Indicando allora con h ed h_{\max} le deflessioni del fascetto elettronico dell'oscillografo misurate nell'oscillogramma in corrispondenza ai valori (34) e (35) del segnale (fig. 18) e con p la sensibilità dell'oscillografo, si avrà

$$U_{2M} = p h = V_0 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) = V_0 \cos^2 \varphi = V_0 (1 - \operatorname{sen}^2 \varphi) = U_{2\frac{\pi}{2}} - V_0 \operatorname{sen}^2 \varphi$$

$$U_{2\frac{\pi}{2}} = p h_{\max} = V_0$$

Dalle relazioni (36) si ricava immediatamente

$$U_{2\varphi} = p (h_{\max} - h) = V_0 \operatorname{sen}^2 \varphi$$



e quindi

$$(37) \quad \varphi = \arcsen \sqrt{\frac{h}{h_{\max}}} = \arccos \sqrt{\frac{h_{\max} - h}{h_{\max}}}$$

Nel caso in cui il segnale rivelato sia espresso dalla (5) e rappresenti quindi la differenza dei due segnali $U_1(t)$ e $U_2(t)$ si avrà in modo analogo (fig. 19)

$$(38) \quad v_M = V_0 \cos \left[2\theta_{\max} - \frac{\pi}{2} \right] = ph$$

e dopo aver posto anche in questo caso

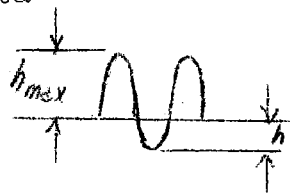
$$\theta_{\max} = n\frac{\pi}{2} + \varphi$$

la (38) diviene

$$(39) \quad v_M = V_0 \cos \left[\frac{\pi}{2} + 2\varphi \right] = -ph$$

Per $\theta = \frac{\pi}{4}$ la tensione di uscita risulta

$$(40) \quad v_{\frac{\pi}{4}} = V_0 = ph_{\max}$$



Dalle (39) e (40) ricordando che $\cos \left(\frac{\pi}{2} + 2\varphi \right) = -\sin 2\varphi$ si ottiene

$$(41) \quad \sin 2\varphi = \frac{h}{h_{\max}}$$

da cui in definitiva

$$(42) \quad \varphi = \frac{1}{2} \arcsin \frac{h}{h_{\max}}$$

Bibliografia

- (1) - B. Rossi: Principles of Physics Series: Optics (Addison, Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts, 1957)
- (2) - C.L. Andrews: Optics of the Electromagnetic Spectrum (Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1960)
- (3) - H. Rudolph: Photoelectric Polarimeter attachment - J. Opt. Soc. Am. 45, 50 (1955)
- (4) - G. Raoult: Production of intense magnetic fields by impulses. Application to phenomena of rotary polarization and magnetic birifrangence - Ann. phys., Paris, (Ser. 12) 4, 369 (1949)
- (5) - J. Malecky, M. Surma, J. Gibalewicz: Measurements of the intensity of transient magnetic fields by the Faraday Effect - Acta Phys. Polon. 16, 151 (1957)
- (6) - F. Hock: Use of the Faraday Effect for the measurement of magnetic fields - Z. angew. Phys. 6, 151 (1954)
- (7) - A. Piekara and J. Malecky: On a method of producing strong magnetic fields of short duration - Acta Phys. Polon. 15, 381 (1956)
- (8) - Van Vleck: Electric and magnetic susceptibilities (Oxford Univ. Press, 1959)
- (9) - Schütz: Handbuch der Experimental Physik XII.1 Magneto-optic
- (10) - Bequerel and de Haas: Z. Physik 52, 678 (1929); 57, 11 (1929)
- (11) - International Critical Tables VI p. 434

Dicitura figure

- Fig. 1 - Schema ottico: C condensatore, F fenditura, L lente collimatrice, P polarizzatore, A₁ e A₂ analizzatori.
- Fig. 2 - Sonda duplice: i tre prismi sono realizzati in flint pesante SF4, hanno le superfici laterali mattate e brunite e sono cementati con Balsamo del Canada.
- Fig. 3 - Sonda semplice: a margine è rappresentato schematicamente il montaggio ottico impiegato nelle misure con detta sonda.
- Fig. 4 - Effetto della disuniformità radiale del campo magnetico: la figura rappresenta una sezione assiale della bobina e di uno dei due fasci di luce avente diametro $2r$. Con x_0 è indicata la eccentricità del fascio rispetto all'asse della bobina e con e l'eccentricità del raggio luminoso elementare generico in seno al fascio di luce.
- Fig. 5 - Andamento presunto del campo H e del gradiente $g(x)$ su un generico diametro della bobina: in una zona adiacente all'asse il campo magnetico ha presumibilmente andamento parabolico, in conseguenza il gradiente $g(x)$ varia su un generico raggio con legge praticamente lineare (cfr. tesi di laurea citata).
- Figg. 6 + 11 - Effetti della orientazione dei piani di trasmissione di polarizzatore e analizzatore: tutti gli oscillogrammi sono stati ottenuti con polarizzatore e analizzatore incrociati, variandone successivamente l'orientazione rispetto al piano di incidenza relativo alla prima riflessione totale prodotta dalla sonda $\text{div } \frac{\pi}{2}$.
- Fig. 6 - L'oscillogramma è stato ottenuto ruotando di circa $22^{\circ}30'$ il polarizzatore rispetto alla posizione di optimum.
- Fig. 7 - La rotazione rispetto alla posizione di optimum è di circa 45° ; in queste condizioni la percentuale di luce polarizzata ellitticamente è massima ed il segnale è identico a quello ottenibile con un percorso otticamente attivo di lunghezza metà.
- Fig. 9 - L'oscillogramma corrisponde ad una rotazione di circa $\frac{\pi}{2}$ del polarizzatore rispetto al piano di incidenza; le divergenze rispetto al segnale teorico di fig. 11 sono da attribuire solo ad imperfetta valutazione degli angoli.
- Fig. 11 - Il piano di trasmissione del polarizzatore è parallelo al citato piano di incidenza. In queste condizioni il segnale presenta un andamento corretto in

quanto la formazione di luce polarizzata ellitticamente non si verifica in corrispondenza dei punti di minimo e di massimo del segnale stesso.

Fig.12 - Sezione schematica del magnete adoperato nelle misure.

Figg. 13 e 13a - Segnale ottenuto con sonda semplice: L'oscillogramma superiore rappresenta l'andamento della corrente nella bobina e quello inferiore il segnale di uscita del fotomoltiplicatore. Scala dei tempi 1msec/cm; sensibilità deflessione verticale 0,2 V/cm.

Figg. 14 e 14a - L'oscillogramma è ottenuto ancora con la sonda semplice. I piani di trasmissione di polarizzatore e analizzatore sono a 45° .

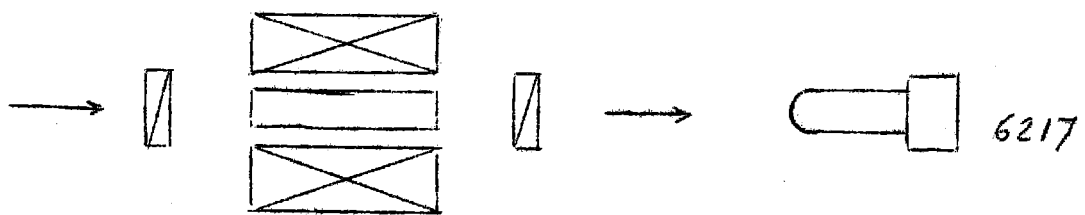
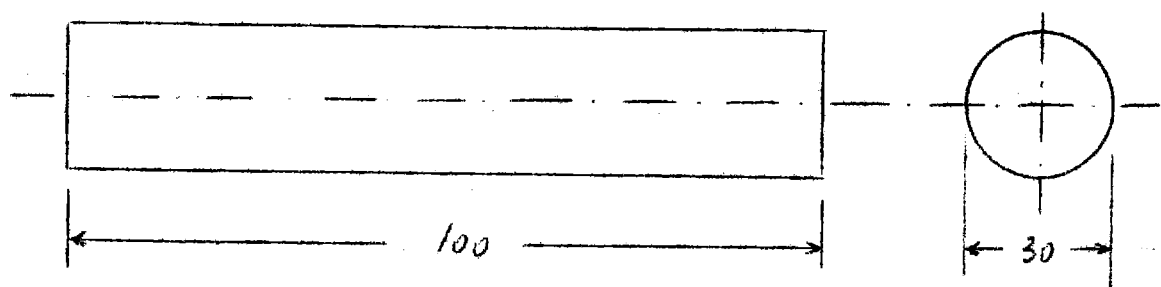
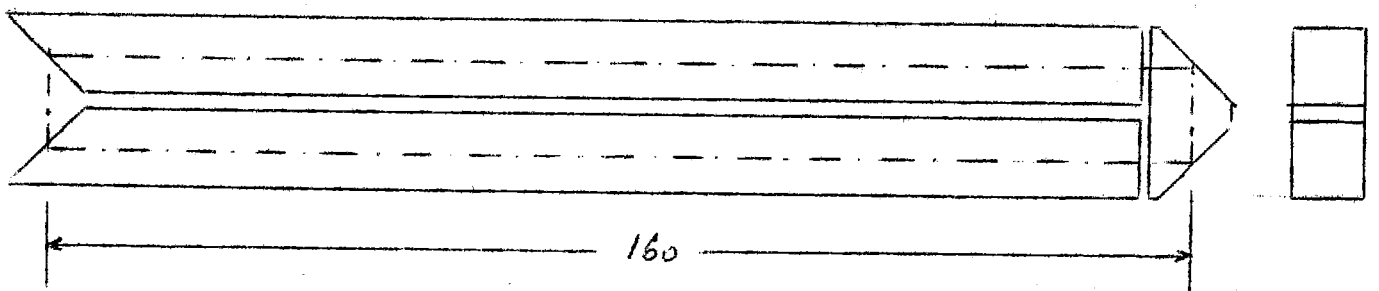
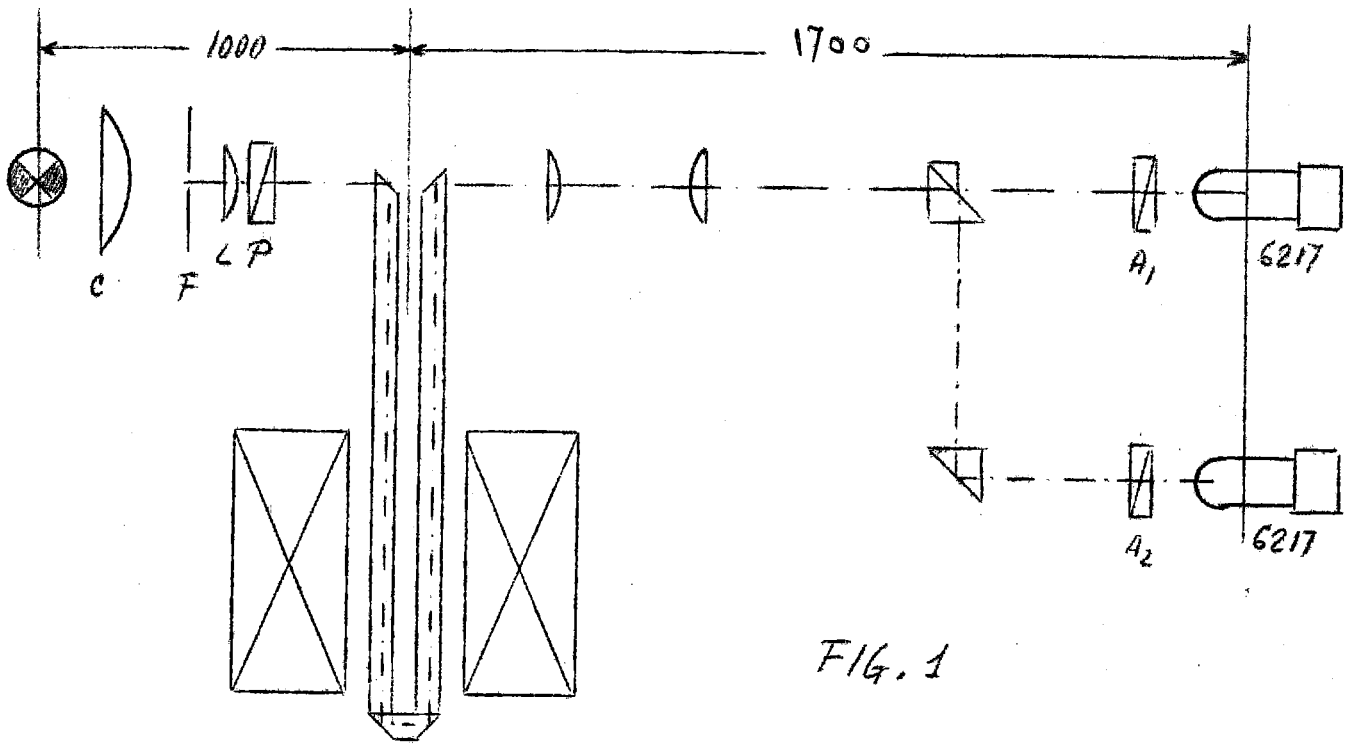
Figg. 15, 15a, 15b - Oscillogramma ottenuto con sonda duplice. Scala dei tempi 1 msec/cm. Sensibilità di deflessione verticale 0,2 V/cm. In fig. 15a è riprodotto l'oscillogramma di fig. 15b; la scala delle ordinate è in questo caso 0,1 V/cm. L'oscillogramma inferiore di fig. 15 b rappresenta la tensione indotta su una bobina di peak-up dal campo magnetico impulsato e concatenata con i soli flussi dispersi.

Fig. 16 - Segnali di uscita dei due fotomoltiplicatori nella misura con sonda duplice. L'oscillogramma superiore è raccolto sulla placca del fotomoltiplicatore che in condizioni di riposo è al massimo della conduzione. Sensibilità di deflessione verticale 0,2 V/cm.

Fig. 17 - L'oscillogramma rappresenta la differenza fra i due segnali rappresentati in fig. 16.

Fig. 18 - Segnale ottenuto con polarizzatore e analizzatore incrociati.

Fig. 19 - Segnale ottenuto con polarizzatore e analizzatore a 45° .



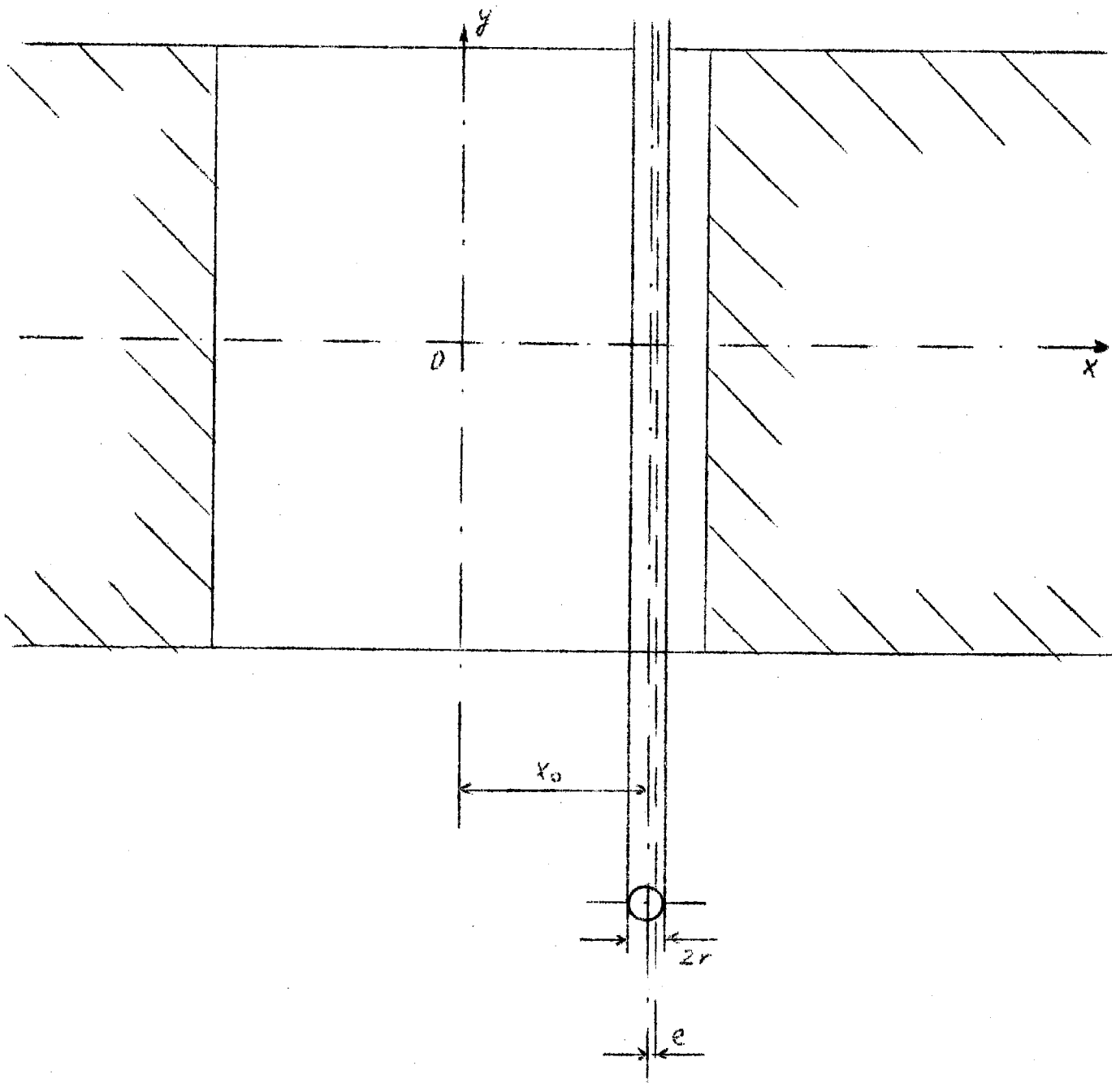


FIG. 4

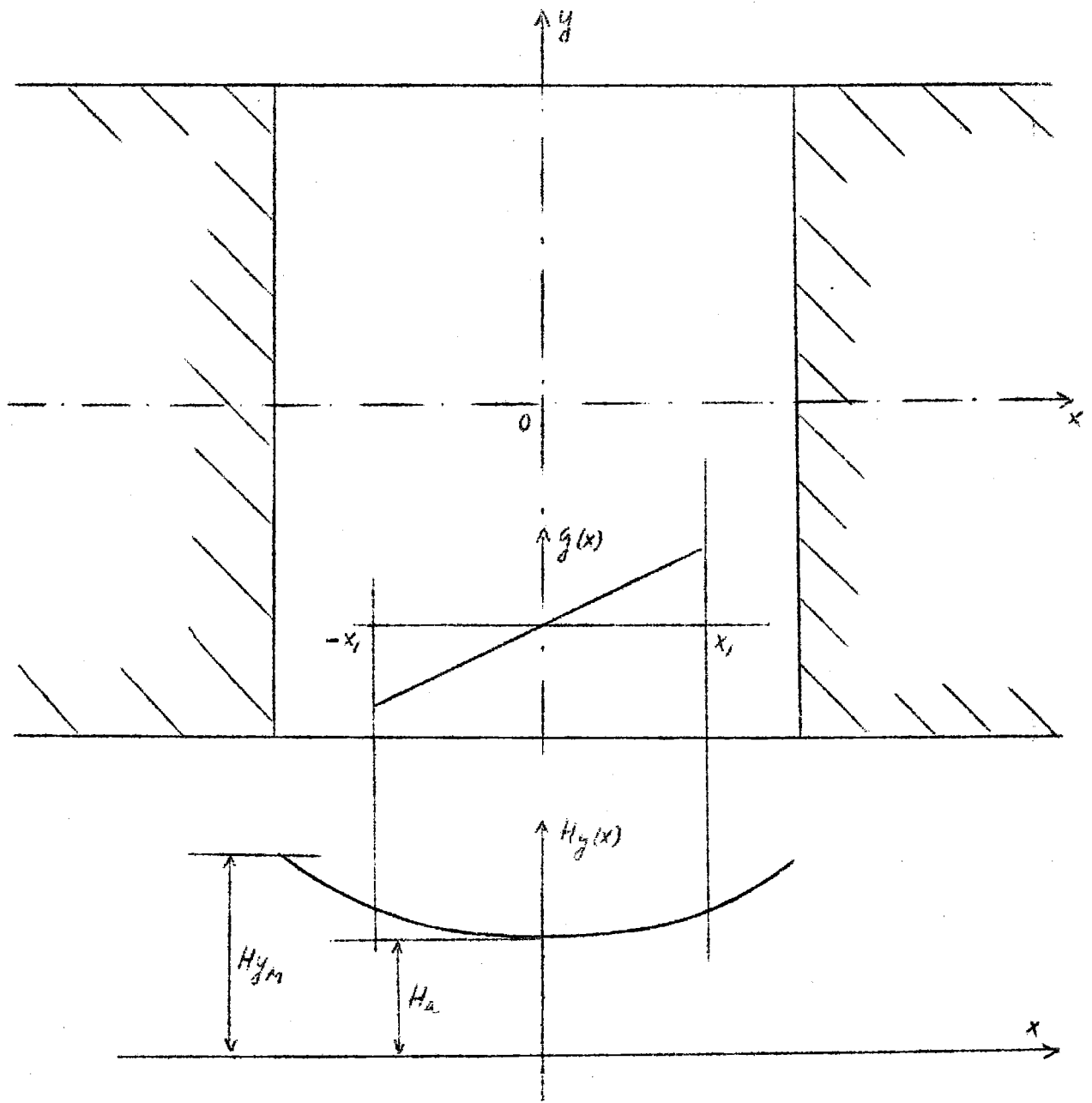


FIG. 5

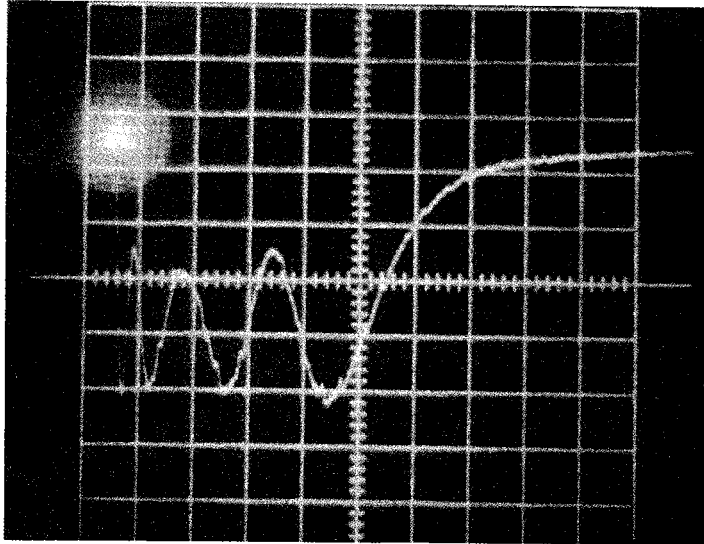


Fig. 6

l

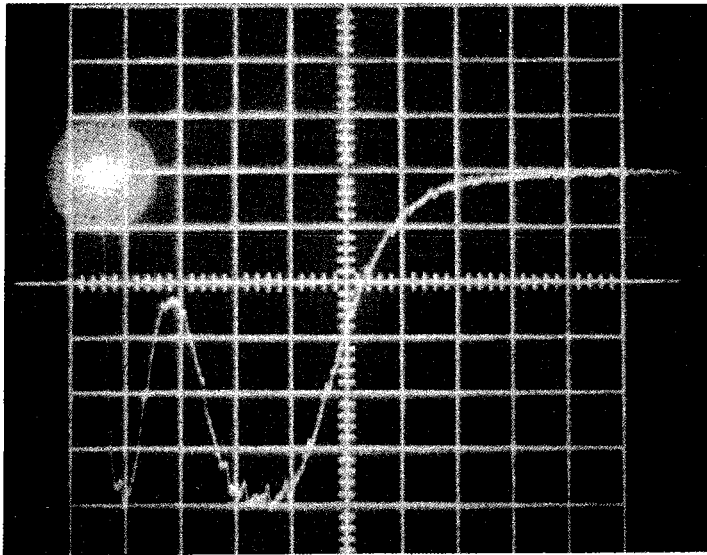


Fig. 7

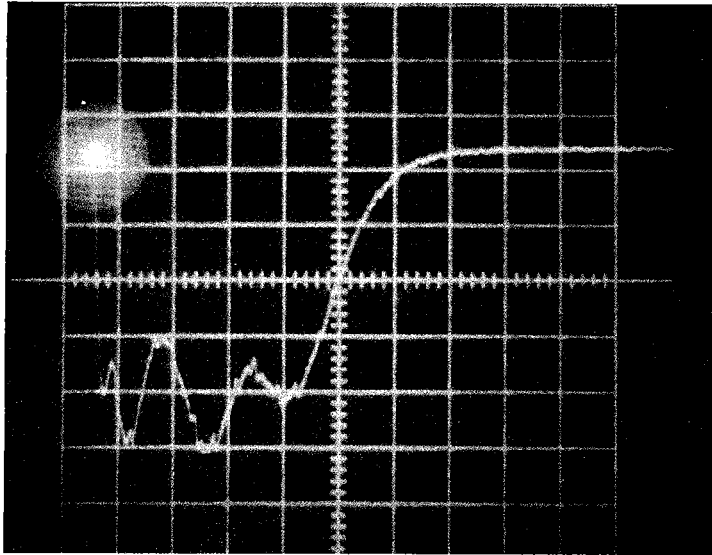


Fig. 8

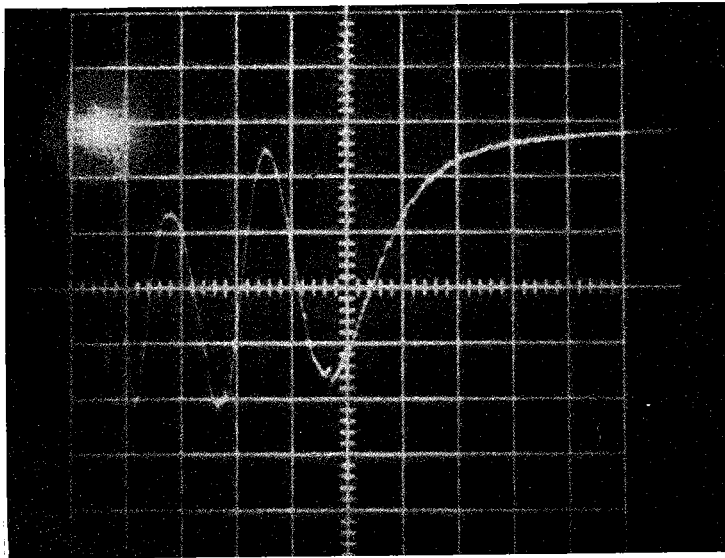


Fig. 9

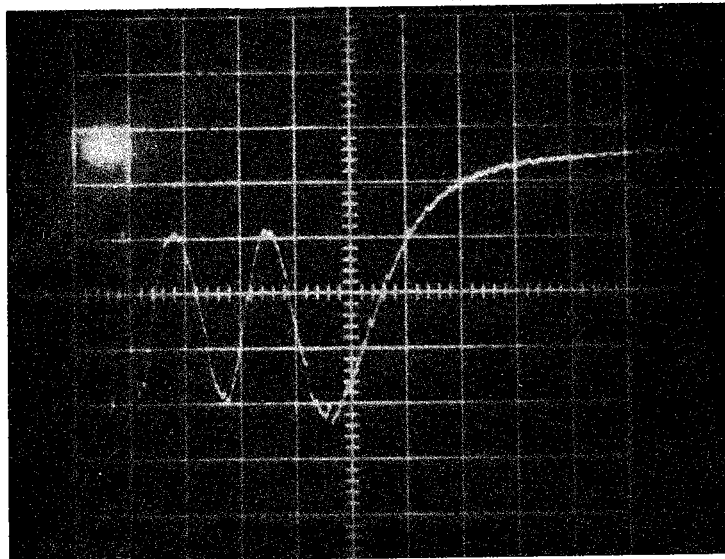


Fig. 10

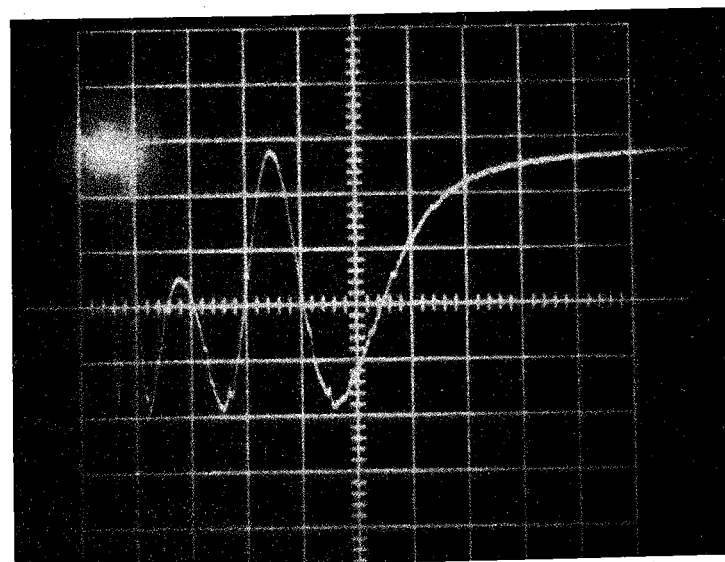


Fig. 11

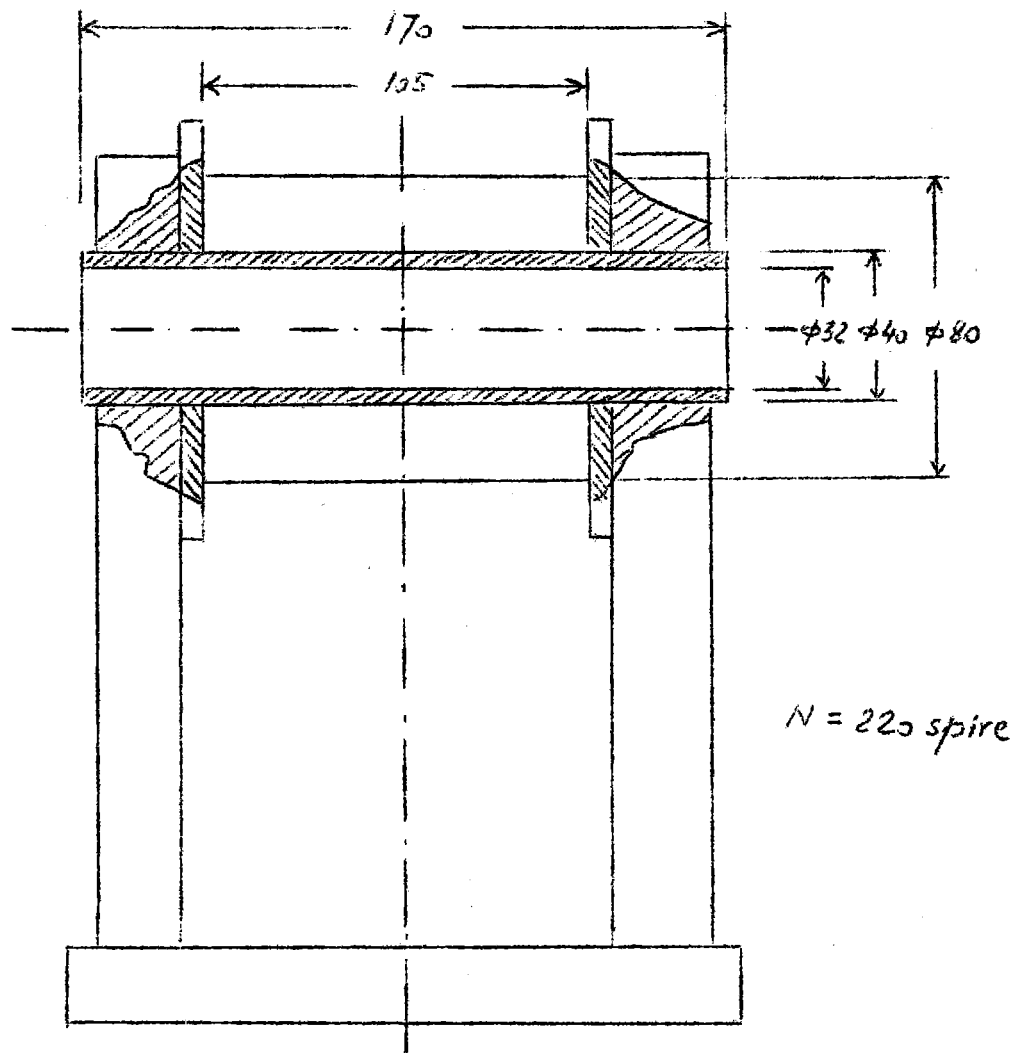


FIG. 12

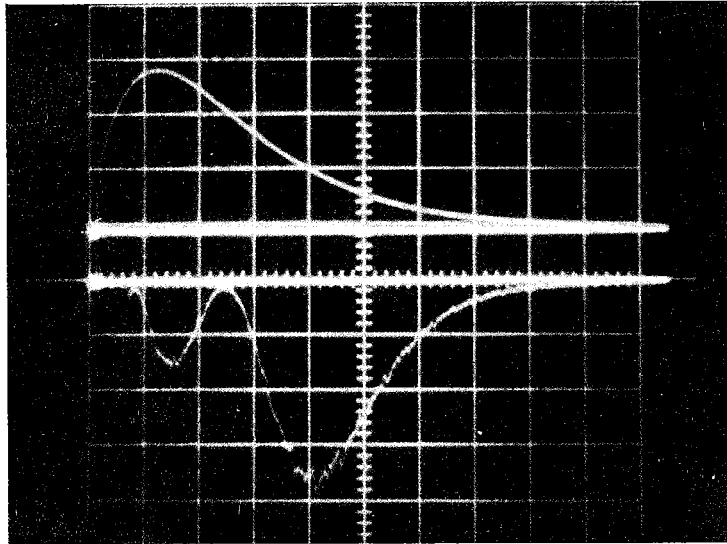


Fig. 13

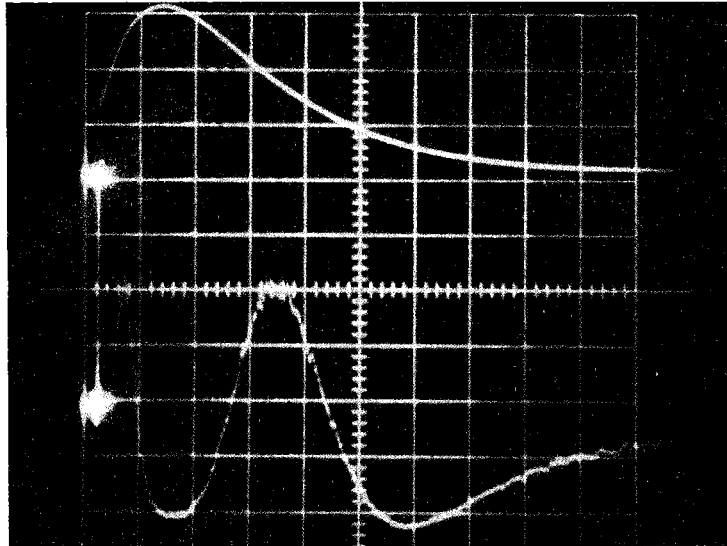


Fig. 14

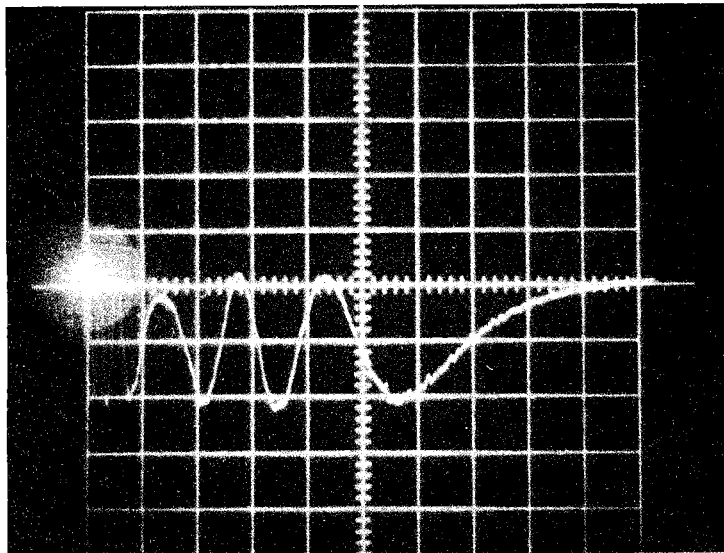
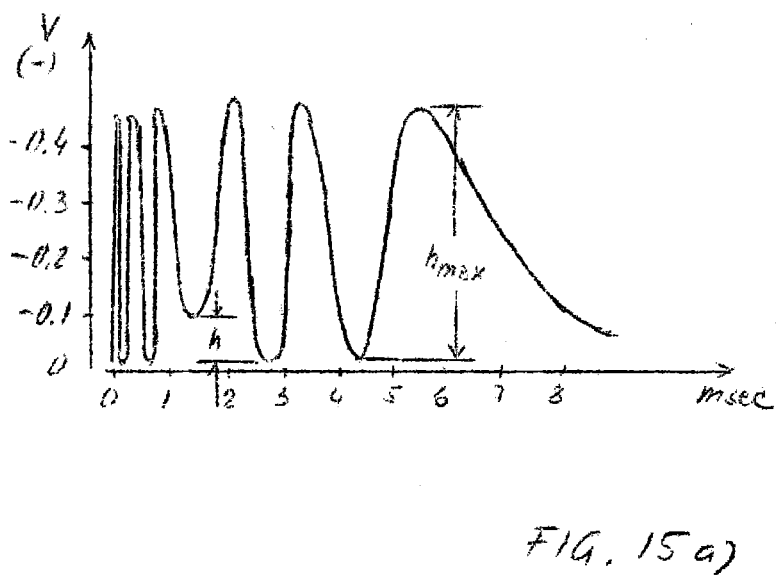
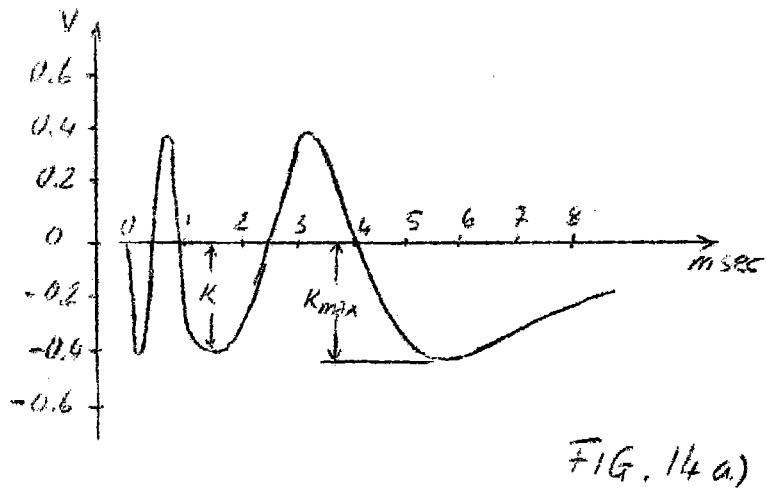
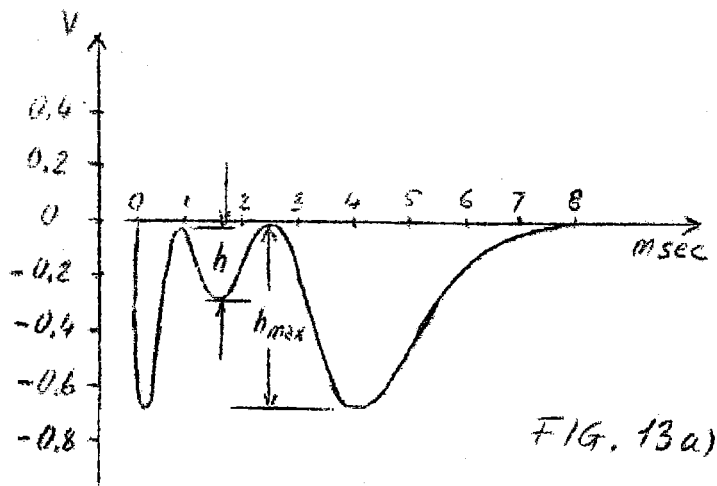


Fig. 15



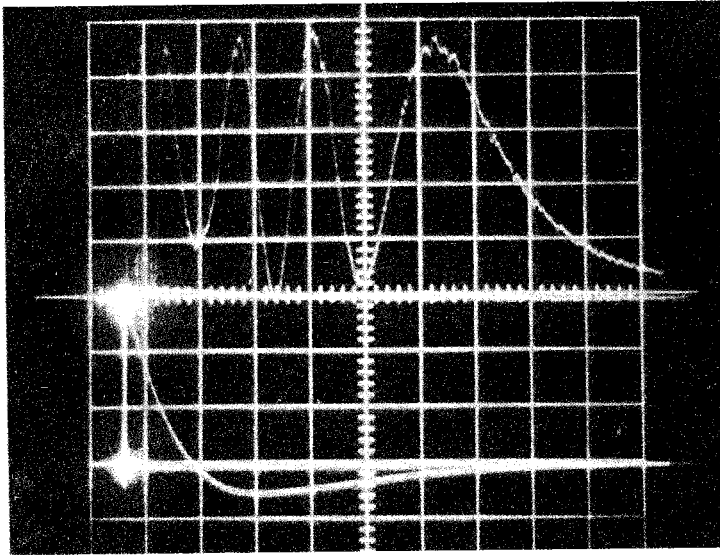


Fig. 15b

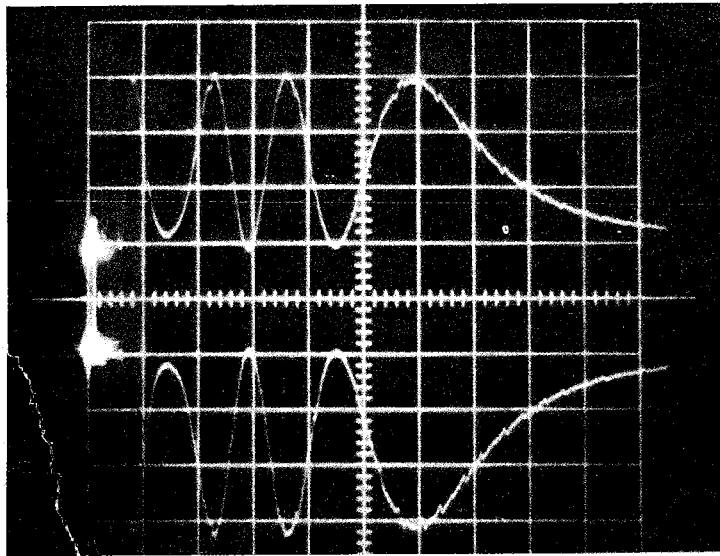


Fig. 16

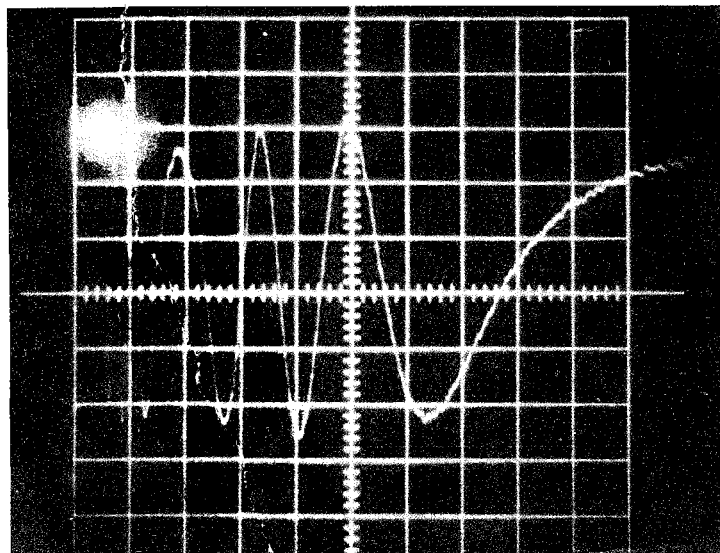


Fig. 17

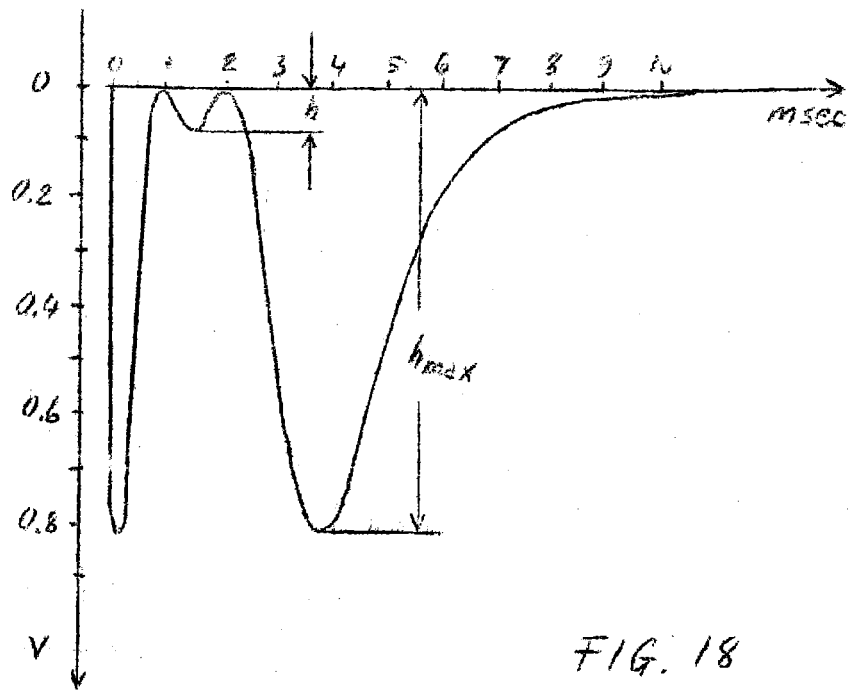


FIG. 18

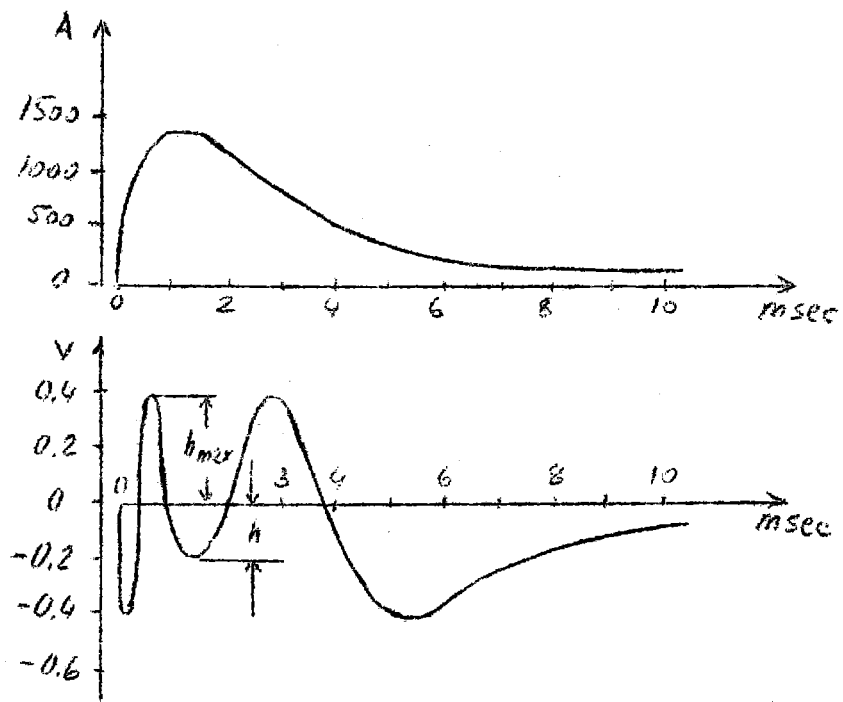


FIG. 19